

Options américaines : méthodes numériques

G. Pagès

gpa@ccr.jussieu.fr

www.proba.jussieu.fr/pageperso/pages

Univ. PARIS 6 (Labo. Proba. et Modèles aléatoires, UMR 7599)

ACI-NIM FIN'QUANT, Juin 2006

Options américaines

▷ *Marché financier* cote des actifs négociables :

$$S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d) \quad t \in [0, T].$$

Enjeu : Que faire lorsque $d \geq 4 \dots$

▷ *Taux d'intérêt mathématique* :

1 Euro placé à $t = 0$ au taux r vaut e^{rt} en t ($r = 0$ dans la suite).

• *Option d'achat ou Call* :

Droit d'acheter à une date $t \in [0, T]$ l'actif S au *prix d'exercice* K

• *Option de vente ou Put* :

Droit de vendre à une date $t \in [0, T]$ l'actif S au prix (d'exercice) K

- *Option Américaine “vanille”* :

Droit de recevoir à une date $t \in [0, T]$ un flux $\varphi(t, S_t)$

Options bermudéennes

- Produits de même nature mais où les instant d'exercice possibles sont discrets

$$t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_n \in [0, T].$$

Souvent $t_k := \frac{kT}{n}$.

- Approximation des options américaines quand $n \rightarrow +\infty$.
- Mais en fait souvent plus réaliste !...

Dynamiques des actifs

- I. Modèle Black-Scholes d -dimensionnel :

$$dS_t^i = S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dW_t^j, \quad i = 1, \dots, d$$

d'où

$$\log(S_t^i) = -\frac{1}{2} |\sigma_{i\cdot}|^2 + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} W_t^j, \quad i = 1, \dots, d$$

- II. Modèles à volatilité locale : $\sigma_{ij} \longleftarrow \sigma_{ij}(t, S_t)$
- III. Modèles à volatilité stochastique : $\sigma = (\sigma_t)_{t \in [0, T]}$ est un processus “autonome” (Là on sort des modèles complets ...)..
- IV. Modèles à volatilité “universelle” (locale+stochastique), etc.

Processus de structure markovien et options bermudéennes

- On remplace $t_k = \frac{kT}{n}$ par k .
- On “extrait” de (S_t) un **processus de structure** markovien à temps discret

$$X_k = F_k(X_{k-1}, \varepsilon_k), \quad k = 1, \dots, n$$

où $F_k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^d$ borélienne et les

ε_k sont des vecteurs aléatoires indépendants, $\varepsilon_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$.

L’histoire observée c’est la filtration des (S_{t_k}) (et des (X_k))

$$\mathcal{F}_k = \sigma(S_0, S_{t_1}, \dots, S_{t_k}) = \mathcal{F}_k^X := \sigma(X_0, \dots, X_k).$$

- La propriété de Markov s'écrit :

$$\mathbb{E} (g(X_k) | \mathcal{F}_{k-1}^X) = \mathbb{E} (g(X_k) | X_{k-1}) = P_{k-1,k}(g)(X_{k-1})$$

où

$$P_{k-1,k}(g)(x) = \mathbb{E} (g(F_k(x, \varepsilon_k)))$$

désigne la probabilité de transition entre les instants $k - 1$ et k .

- Typiquement (pour les options américaines/bermudéennes “vanille”) :

$$X_k := \begin{cases} S_{t_k} \\ \log(S_{t_k}) \\ \bar{S}_{t_k} \quad (\text{schéma d'Euler}) \end{cases}$$

- Mais aussi pour les options trajectoires dépendantes (asiatiques, lookback, etc)

$$X_k := \begin{cases} (S_{t_k}, \frac{1}{t_k} (S_0 + \dots + S_{t_k})) \\ (\bar{S}_{t_k}, \frac{1}{t_k} (\bar{S}_0 + \dots + \bar{S}_{t_k})) \\ (S_{t_k}, \max_{0 \leq i \leq k} S_{t_i}) \end{cases}$$

- On écrit l'option bermudéenne sur le processus de structure

Droit de recevoir à une date t_k , $k = 0, \dots, n$ un flux $\varphi(k, X_k)$

Question :

Quel est le prix (ou fonction de valeur) \mathcal{V}_k de cette option à chaque instant k ?

Arbitrage et fonction de valeur

ÉTAPE 1 :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_n & := \varphi(n, X_n) \\ \mathcal{V}_k & := \max(\varphi(k, X_k), \mathbb{E}(\mathcal{V}_{k+1} | \mathcal{F}_k^X)) \end{cases}$$

ÉTAPE 2 : Par récurrence descendante *via* la **propriété de Markov**

$$\mathcal{V}_k = v_k(X_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Arbitrage et exercice optimal

- On pose pour simplifier $Z_k = \varphi(k, X_k)$ (“l’obstacle”)

ÉTAPE 1 :

$$\begin{cases} \tau_n & := n \\ \tau_k & := k \mathbf{1}_{\{Z_k > \mathbb{E}(Z_{\tau_{k+1}} | \mathcal{F}_k)\}} + \tau_{k+1} \mathbf{1}_{\{Z_k \leq \mathbb{E}(Z_{\tau_{k+1}} | \mathcal{F}_k)\}} \end{cases}$$

Markov \implies Conditionnement par $\mathcal{F}_k^X =$ conditionnement par X_k .

ÉTAPE 2 : On montre (théorème fondamental de l’arrêt optimal) que

$$\mathcal{V}_0 = \mathbb{E}(Z_{\tau_0}) \quad \text{ou encore} \quad V(0, X_0) = \mathbb{E}(\varphi(\tau_0, X_{\tau_0})).$$

Méthode de régression (Longstaff-Schwarz)

APPROXIMATION 1 : Troncation de la dimension

▷ À la date k , on considère “une” base $(e_1(X_k), e_2(X_k), \dots, e_N(X_k), \dots)$ de $L^2(\Omega, \sigma(X_k), \mathbb{P})$.

▷ On tronque

$$e^{[N]}(X_k) := (e_1(X_k), e_2(X_k), \dots, e_N(X_k)).$$

et on pose

▷ $\tau_n^{[N]} := n$

▷ $\alpha_k^{[N]} := \operatorname{argmin} \left\{ \mathbb{E}(Z_{\tau_{k+1}^{[N]}} - \alpha \cdot e^{[N]}(X_k))^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^N \right\}.$

▷ $\tau_k^{[N]} := k \mathbf{1}_{\{Z_k > \alpha_k^{[N]} \cdot e^{[N]}(X_k)\}} + \tau_{k+1}^{[N]} \mathbf{1}_{\{Z_k \leq \alpha_k^{[N]} \cdot e^{[N]}(X_k)\}}.$

APPROXIMATION 2 : Approcher $\mathbb{E}(Z_{\tau_0^{[N]}})$ par une méthode de Monte Carlo :

▷ Simuler M copies indépendantes $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}, \dots, X^{(M)}$ du processus de structure $X = (X_k)_{0 \leq k \leq n}$.

▷ Pour tout $m \in \{1, \dots, M\}$, $\tau_n^{[N, m, M]} := n$

▷ $\alpha_k^{[N], M} := \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Z_{\tau_{k+1}^{[N], m, M}}^{(m)} - \alpha \cdot e^{[N]}(X^{(m)}) \right)^2$.

▷ $\tau_{k+1}^{[N], m, N} := k \mathbf{1}_{\{Z_k^{(m)} > \alpha_k^{[N], M} \cdot e^{[N]}(X_k)\}} + \tau_{k+1}^{[N], m, N} \mathbf{1}_{\{Z_k^{(m)} \leq \alpha_k^{[N], M} \cdot e^{[N]}(X_k)\}}$. (*)

▷ $\mathcal{V}_0 \approx \mathbb{E}(Z_{\tau_0^{[N]}}) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Z_{\tau_0^{[N], m, M}}^{(m)}$.

THÉORÈME (Clément-Lamberton-Protter) L'approximation MC vérifie un

TCL

$$\left(\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M Z_{\tau_k^{[N],m,M}}^{(m)} - \mathbb{E}(Z_{\tau_k^{[N]}}), \sqrt{M}(\alpha_k^{[N],M} - \alpha_k^{[N]}) \right)_{0 \leq k \leq n-1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; \Sigma).$$

Bilan : • Méthode “naturelle” : on approche l’espérance conditionnelle par un opérateur de régression (affine) sur une base tronquée de L^2 .

- Mais : l’essentiel des calculs se fait *on-line*.
- Mais : totalement *pay-off* dépendant.
- La **parallélisation** est donc un enjeu en temps réel : le noeud se situe en (*).

Méthode de quantification

Fondé sur la fonction de valeur.

APPROXIMATION 1 : On remplace

$$X_k \longleftarrow \hat{X}_k = \pi_k(X_k)$$

où $\pi_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \Gamma_k$, Γ_k grille de taille N_k , $\Gamma_k = \{x_k^1, \dots, x_k^{N_k}\} \subset \mathbb{R}^d$.

Mais on perd la markoviannité ...

Typiquement $\pi_k := \text{Proj}_{\Gamma_k} =$ **Projection au plus proche voisin** sur Γ_k .

APPROXIMATION 2 : $\hat{Z}_k := \varphi(k, \hat{X}_k)$, et ... on force la markovianité!

$$(\text{PGMDYNQUANT}) \equiv \begin{cases} \hat{V}_n & = \hat{Z}_n \\ \hat{V}_k & = \max(\hat{Z}_k, \mathbb{E}(\hat{V}_{k+1} | \hat{X}_k)), \quad k = 1, \dots, N_k - 1. \end{cases}$$

Par récurrence descendante $\widehat{V}_k = \widehat{v}_k(\widehat{X}_k)$ où

$$\begin{cases} \widehat{v}_n(x_n^i) &= \varphi(n, x_n^i), \quad i = 1, \dots, N_n \\ \widehat{v}_k(x_k^i) &= \max(\varphi(k, x_k^i), \sum_{j=1}^{N_k} \widehat{p}_k^{ij} \widehat{v}_{k+1}(x_{k+1}^j)), \quad i = 1, \dots, N_k \\ & k = 1, \dots, N_k - 1. \end{cases}$$

L'enjeu : Calculer *off-line*

les grilles Γ_k et les transitions quantifiées $\widehat{p}_k^{ij} := \frac{\mathbb{P}(\widehat{X}_{k+1} = x_{k+1}^j, \widehat{X}_k = x_k^i)}{\mathbb{P}(\widehat{X}_k = x_k^i)}$.

Ensuite (PGMDYNQUANT) est instantanée (et se parallélise ...) pour le calcul d'un portefeuille quelconque d'options de même maturité.

THÉORÈME (a) (Bally-Pagès, 2003) Schéma d'ordre 0 (ci-dessus,
(analogue d'éléments finis d'ordre 0 non conformes)

$$\|\mathcal{V}_0 - \widehat{v}_0(\widehat{X}_0)\|_2 \leq C_{p,X,\varphi} \sum_{k=0}^n \|X_k - \widehat{X}_k\|_2.$$

(b) (Bally-Pagès-Printems, 2003) Schéma d'ordre 1 (analogue d'éléments
finis d'ordre 1 non conformes)

$$\|\mathcal{V}_0 - \widehat{v}_0(\widehat{X}_0)\|_2 \leq C_{p,X,\varphi} \sum_{k=0}^n \|X_k - \widehat{X}_k\|_2^2.$$

Calculer les grilles optimales et les transitions (I)

- $X \in L^{2+\eta}(\mathbb{P})$ vecteur aléatoire, $\Gamma = \{x^1, \dots, x^N\} \subset \mathbb{R}^d$, $|\Gamma| = N$.

$$\Gamma \mapsto \|X - \hat{X}^\Gamma\|_2^2 = \mathbb{E}|X - \hat{X}^\Gamma|^2 = \mathbb{E} \min_{x^i \in \Gamma} |X - x^i|^2$$

atteint son minimum en une grille Γ^* . On a la **relation de stationnarité**

$$\hat{X}^{\Gamma^*} = \mathbb{E}(X | \hat{X}^{\Gamma^*})$$

et le **théorème de Zador non paramétrique** (Luschgy-Pagès, 2006)

$$\|X - \hat{X}^{\Gamma^*}\|_2 \leq C_{2,\eta} \|X\|_{2+\eta} N^{-\frac{1}{d}}.$$

Calculer les grilles optimales

▷ *Algorithme CLVQ* : algorithme de gradient stochastique fondé sur la recherche du plus proche voisin dans \mathbb{R}^d . On simule M copies indépendantes de $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)}, \dots, \dots, \xi^{(M)}$. Grille courante $\Gamma^{(m)} = \{x^1, \dots, x^N\}$ (taille N).

SÉLECTION À LA DATE $m + 1$:

Recherche du plus proche voisin de $\xi^{(m+1)}$ dans la grille $\Gamma^{(m)}$, soit $x^{i(m)}$.

Parallélisation ... par stratification éventuelle de l'espace

AJUSTEMENT : “Attire” le plus proche voisin de $\xi^{(m+1)}$ par une homothétie de rapport $1 - \gamma_m$ centrée en $\xi^{(m+1)}$:

$$x^{i(m)}(1 - \gamma_m) + \gamma_m \xi^{(m+1)} \longleftarrow x^{i(m)}.$$

▷ **Algorithme Lloyd I randomisé** : algorithme de point fixe fondé sur la recherche du plus proche voisin dans \mathbb{R}^d . $\Gamma^{(0)}$ grille initiale de taille N . Actualisation de la grille courante $\Gamma^{(m)}$:

$$\hat{X}^{\Gamma^{(m+1)}} = \mathbb{E}(X \mid \hat{X}^{\Gamma^{(m)}})$$

qui converge en diminuant l'erreur de quantification moyenne vers un quantifieur minimum local (stationnaire).

Le calcul de l'espérance conditionnelle se fait *via* simulation MC.

Parallélisation ... par stratification éventuelle de l'espace

▷ **Loi normale sur \mathbb{R}^d** est pré-quantifiée pour $d = 1, \dots, 10$:
téléchargeable sur le site

<http://www.quantification.finance-mathematique.com>

Exemple d'optimisation :

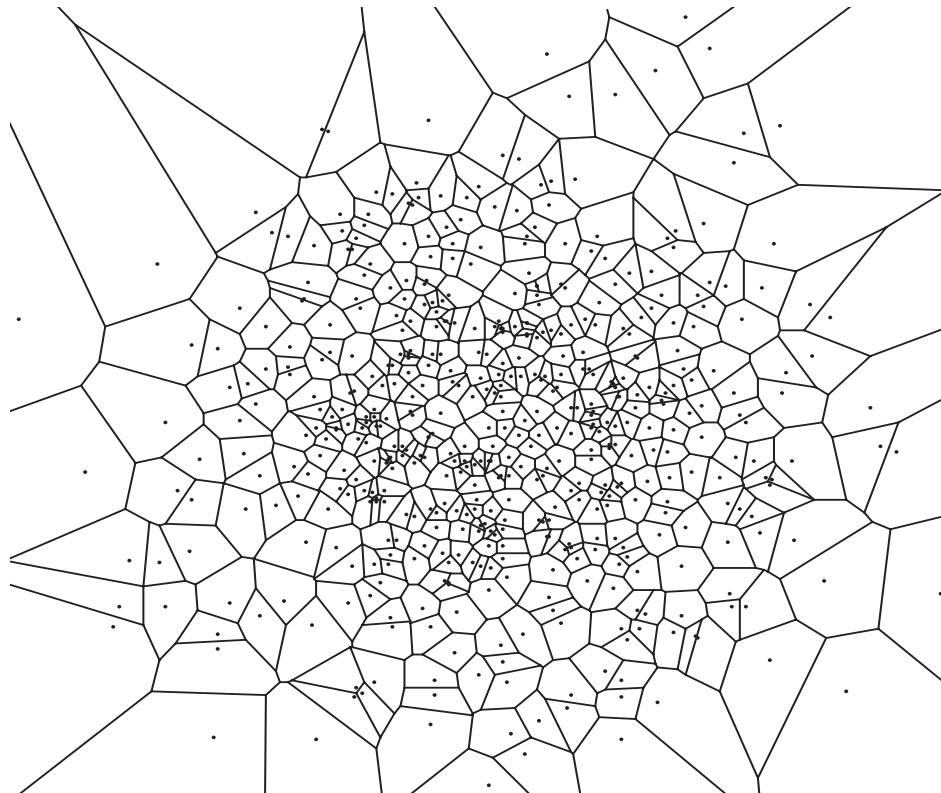


FIG. 1: Grille de quantification de $\mathcal{N}(0; I_2)$, $N = 500$: “avant ”

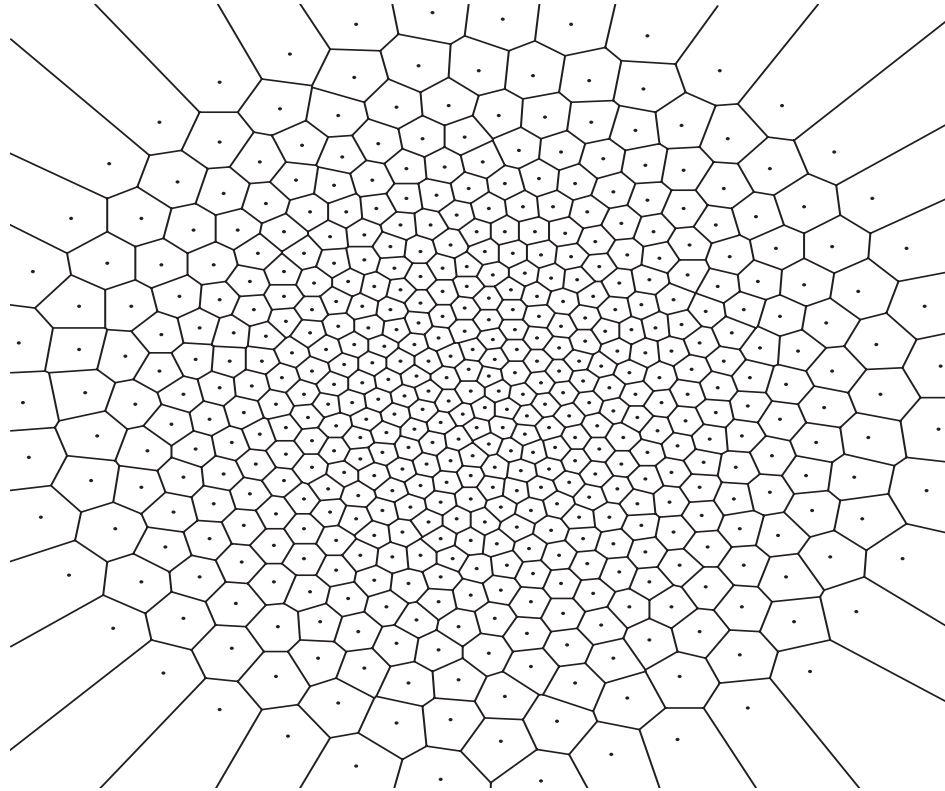


FIG. 2: Grille de quantification optimisée de $\mathcal{N}(0; I_2)$, $N = 500$: “après”

Calculer les transitions (I)

▷ Estimation fréquentielle par *MC* des \widehat{p}_k^{ij} via des recherches de plus proche voisin dans \mathbb{R}^d dans l'arbre de quantification formé par les grilles.

▷ **Processus de structure X gaussien** : **parallélisation par couche** du calcul par simulation (MC + une recherche de plus proche voisin dans \mathbb{R}^d) des transitions \widehat{p}_k^{ij}

$$\mathbb{P}(\widehat{X}_{k+1} = x_{k+1}^j \text{ et } \widehat{X}_k = x_k^i) = \mathbb{P}(\xi \in A_k^{ij}), \quad \xi \sim \mathcal{N}(0; I_{d'})$$

où A_k^{ij} est “géométriquement” explicite : c’est la

Quantification Rapide Parallèle !

▷ **Méthode des gerbes** : **parallélisation par couche** du calcul MC des transitions \widehat{p}_k^{ij} au second ordre près.

$$\mathbb{P}(\widehat{X}_{k+1} = x_{k+1}^j | \widehat{X}_k = x_k^i) = \mathbb{P}(\widehat{X}_{k+1} = x_{k+1}^j | X_k = x_k^i) + O(\mathbb{E}(|X - \widehat{X}|^2 | \widehat{X}_k = x_k^i)).$$

Clé : stationarité des quantifications

Échantillon de résultat numérique

- Exchange American options on geometric assets.
- REFERENCE : [Villeneuve-Zanette, 1998](#) Finite differences for 2-*Dim* exchange American options with dividends.
- MODEL : Standard 2*d*-dim (B & S) model with *non correlated* Brownian Motions (The most “hostile” to quantization ...).
- MATURITY : $T = 1$ year. VOLATILITY : $\sigma_i = \frac{20\%}{\sqrt{d}}$.
- **2*d***-DIM PAY-OFF :
$$h(t, x) = \max \left(\prod_{i=1}^d e^{-\mu_i t} S_t^i - \prod_{i=d+1}^{2d} e^{-\mu_i t} S_t^i, 0 \right).$$
- INITIAL VALUES :
 $\prod_{i=1}^d S_0^i = 40, \prod_{i=d+1}^{2d} S_0^i = 36$ (in-the money), $\mu_1 := 5\%, \mu_2 = 0, \dots$
 $\prod_{i=1}^d S_0^i = 36, \prod_{i=d+1}^{2d} S_0^i = 40$ (out-of-the money), $\mu_{d+1} := 0\%, \dots$

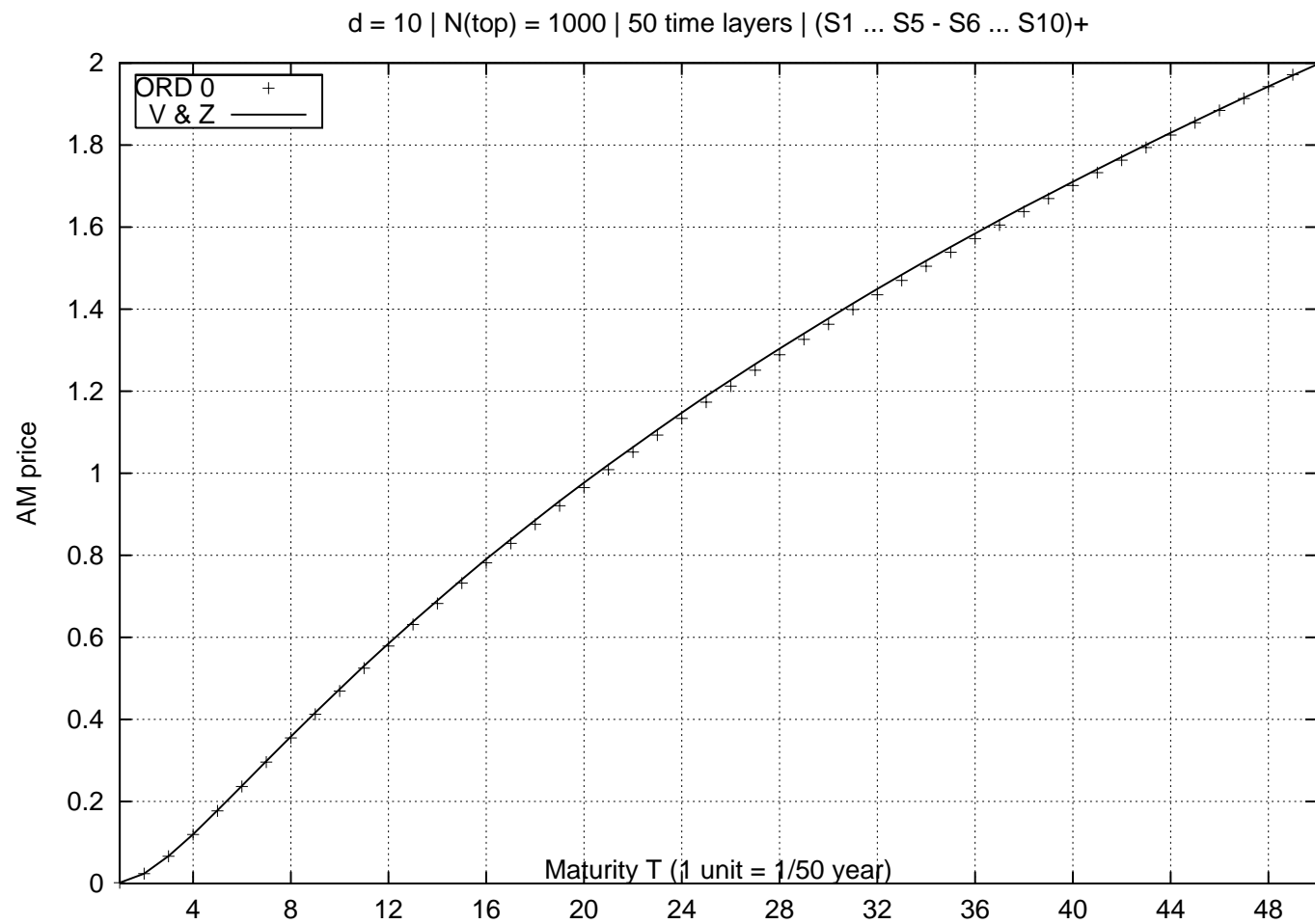


FIG. 3: Option d'échange $10D$ out-of-the-money $(S^1 \dots S^5 - S^6 \dots S^{10})_+$

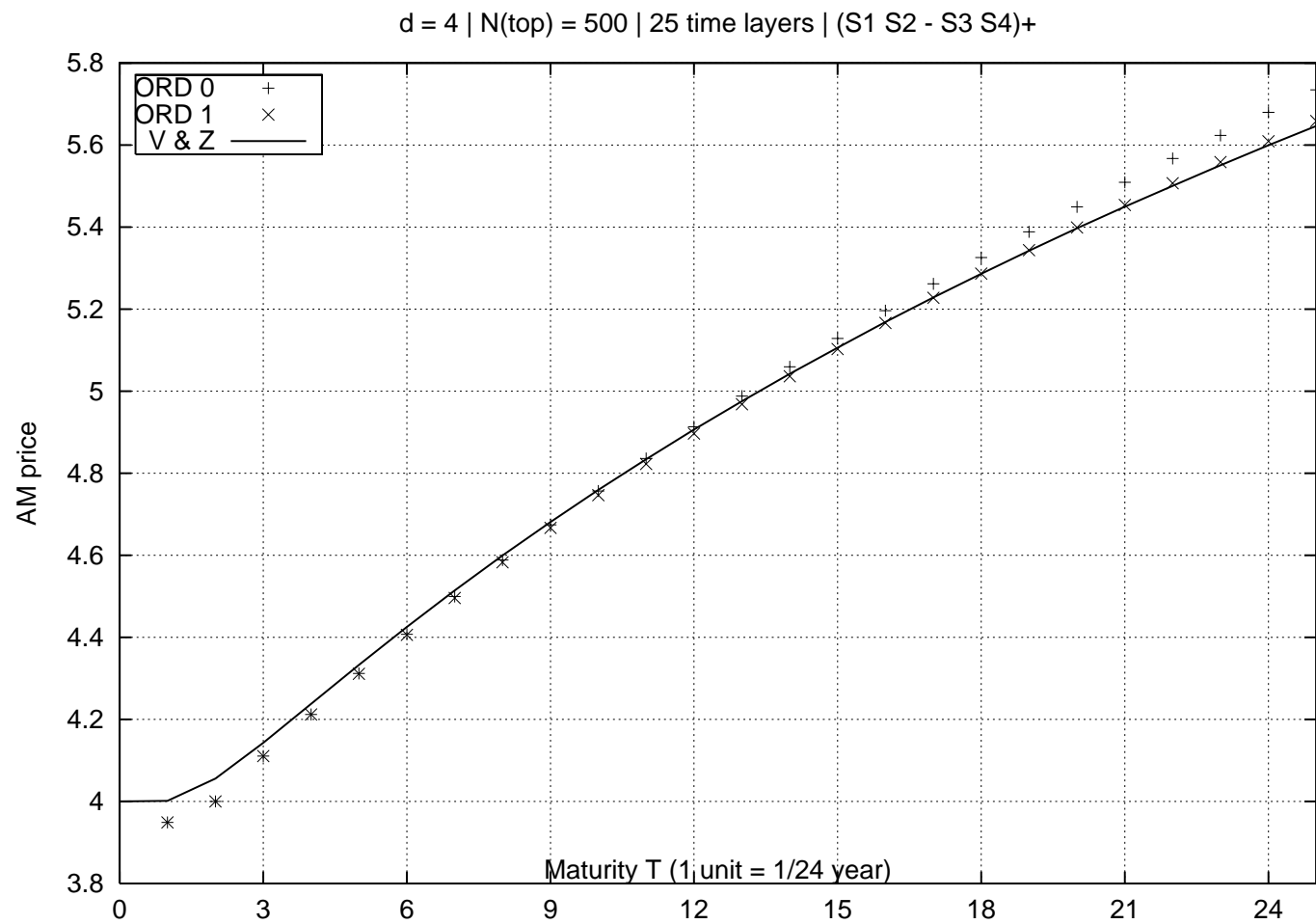


FIG. 4: Option d'échange $4D$ in-the-money $(S^1 S^2 - S^3 S^4)_+$